Teo di Bolzano Weierstrass (Bisezione)

Sia (a_n) una successione di numeri reali limitata, cioè

$$\alpha \leq a_n \leq \beta \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (5.1)$$

allora (a_n) ammette una sottosuccessione convergente a $x \in \mathbb{R}$ con

$$\alpha \leq x \leq \beta \qquad (5.2)$$

Dimostrazione

Supponiamo già di aver costruito (a_{n_k})

$$a_{n_k} \longrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Dimostriamo la (5.2). La (5.1) dice

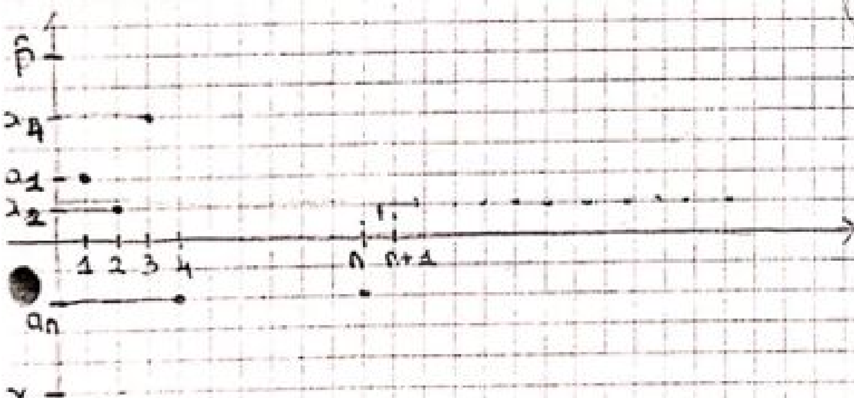
$$a_n \in [\alpha, \beta] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

In particolare $a_{n_k} \in [\alpha, \beta] \ \forall k \in \mathbb{N}$

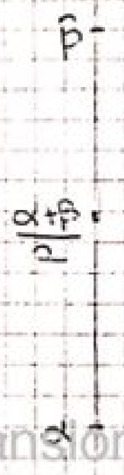
Ma $[\alpha, \beta]$ è chiuso, dunque per definizione di chiusura $x \in [\alpha, \beta]$; cioè la (5.2)

DIMOSTRAZIONE (BISEZIONE)

(a_n) è un insieme [illegible] e stanno sull'asse verticale



Divido $[\alpha, \beta]$ in due parti uguali $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$



affermo che $\exists$ infiniti indici n per cui o
$a_n \in [\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$ oppure $[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$
ma questa affermazione non è ovvia :
Infatti se per assurdo finiti sono gli
$n \in \mathbb{N} : a_n \in [\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$ e finiti sono gli $n \in \mathbb{N} : a_n \in [\frac{\alpha+b}{2},$

quindi deduco finiti sono gli indici $n \in \mathbb{N}$ per cui

$$a_n \in [\alpha, \beta]$$

ma dalla (5.1) $\Rightarrow a_n \in [\alpha, \beta] \; \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è finito, ASSUR
Poniamo $I_0 = [\alpha, \beta]$
Prendiamo I_1 una delle due metà per cui
$a_n \in I_1$ per infiniti $n \in \mathbb{N}$
$I_1 = [\alpha_1, \beta_1]$ (α_1 potrebbe α oppure $\frac{\alpha+\beta}{2}$
β_1 " " $\frac{\alpha+\beta}{2}$ oppure β)
Sia (n_1) sottosuccessione (di indici) per cui $a_{n_1} \in I_1$ per infiniti n_1
Ripeto il ragionamento con

I_1 al posto di I_0
(a_{n_1}) al posto di (a_n)

Dunque $\exists$ infiniti indici n_2 (presi tra gli n_1) per cui $a_{n_2} \in I_2$, scriviamo $I_2 = [\alpha_2, \beta_2]$
si osserva che $I_2 \subset I_1 \subset I_0$ e $\alpha_2 \geq \alpha_1 \geq \alpha_0$ (presi da sinistra) e
$\beta_2 \leq \beta_1 \leq \beta_0$, $(n_2) \subseteq (n_1) \subseteq \mathbb{N}$

Per induzione su k :

$\forall k \in \mathbb{N}$ $\quad \exists (n_k) \subseteq (n_{k-1})$ (sotto successioni contenuta nella sotto successione precedente) (poi riesco a costruire un intervallo, $\exists I_k \subset I_{k-1}$: (contenuto nell'intervallo precedente)

$$a_{n_k} \in I_k \text{ per infiniti } n_k$$

Posso scrivere :
$$I_k = [\alpha_k, \beta_k] ; \; \alpha_k \geq \alpha_{k-1} , \beta_k \leq$$

(come controllo questo passaggio induttivo ?
$k = 1$ è stata detta prima. Se il procedimento è vero al livello k, al livello $k+1$ faccio la solita cosa.

la lunghezza di $(I_K) = \frac{\beta - \alpha}{2^K}$ $\forall K \in \mathbb{N}$

Dunque $\lim_{K \to +\infty} \text{lungh}(I_K) = 0$ (1.1)

$I_K = [\alpha_K, \beta_K]$
(α_K) è crescente
(β_K) è decrescente

$\Rightarrow$ o succ. on. $\exists \lim_{K \to +\infty} \alpha_K = x \in [\alpha, \beta]$

$\exists \lim_{K \to +\infty} \beta_K = y$

Ma da (1.1) segue $\Rightarrow y = x \in [\alpha, \beta]$

α $x=y$ β

Resta da costruire la sottosuccessione (a_{n_K}) convergente a $x \in [\alpha, \beta]$

$\forall K \in \mathbb{N}$ consideriamo

$m_K := \min \{ n \in \mathbb{N} : n > m_{K-1}, a_n \in I_K \}$

m_K è ben definito? cioè l'insieme $\{ \}$ ammette minimo?

Ricordiamo che $\mathbb{N}$ è ben ordinato cioè ogni sottoinsieme $\neq \emptyset$ di $\mathbb{N}$ ammette minimo elemento.

Allora m_K sarà ben definito se dimostro che $\{ \}$ non è vuoto. Ma per costruzione $\forall K \{ \} \neq 0$

$\Rightarrow$ per def. di minimo $\forall K \in \mathbb{N}$: $m_K \in \{ \dots \}$

dunque $m_K > m_{K-1}$, $a_{m_K} \in I_K [\alpha_K, \beta_K]$

La ~~so~~ successione (m_K) è una sottosuccessione di indici cioè (a_{m_K}) è una sottosuccessione di (a_n)

Resta da vedere

$$\lim_{K \to +\infty} a_{m_K} = x$$