UNA SERIE CONVERGENTE ASSOLUTAMENTE È CONVERGENTE

Sia (a_n) una successione di numeri reali

Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$ allora (1.1)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}$$

DIMOSTRAZIONE

Dire che $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}$ significa per definizione,

devo dimostrare che $\exists \lim_{N\to+\infty} S_N \in \mathbb{R}$ dove

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} a_n$$

Ma grazie

$\boxed{\text{succ. convergente a un numero reale}} \Longleftrightarrow \boxed{\text{succ. di Cauchy}} \longrightarrow$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R} = \lim_{N\to+\infty} S_N \in \mathbb{R}$$

Se la $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}$ (CONVERGE) ~~allora~~ se esiste il limite delle somme parziali e ~~converg~~ (TERMINI QUALUNQUE)

DEF.

SE ABBIAMO UNA SERIE A TERMINI QUALUNQUE E CONVERGE, ALLORA È INFINITESIMA LA SUCCESSIONE DI CUI FACCIO LA SERIE

$\frac{(-1)^n}{n}$

applicato alla successione (S_N) mi basta dimostrare che (S_N) è di Cauchy

- Cioè $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}$

$$m, n > \bar{n}_\varepsilon \qquad |S_n - S_m| < \varepsilon \qquad (2.1)$$

Fisso $\varepsilon > 0$, dati due indici $m, n \in \mathbb{N}$ posso supporre $n > m$, dunque $n = m + k$ con $k \in \mathbb{N}$

Allora (2.1) equivale

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall m, k \in \mathbb{N}$

$$m, m+k > \bar{n}_\varepsilon \qquad |S_{m+k} - S_m| < \varepsilon$$

- $$S_{m+k} - S_m = \sum_{j=1}^{m+k} a_j - \sum_{j=1}^{m} a_j$$

$$= \sum_{j=m+1}^{m+k} a_j$$

$$\Rightarrow |S_{m+k} - S_m| = \left| \sum_{j=m+1}^{m+k} a_j \right| \leq \sum_{j=m+1}^{m+k} |a_j|$$

- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=\bar{n}_\varepsilon + 1}^{+\infty} |a_j| < \varepsilon \qquad (3.1)$$

Ma allora preso $\varepsilon > 0$ e preso $\bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ dato dalla (3.1), se $m > \bar{n}_\varepsilon$ $k \in \mathbb{N}$

$$|S_{m+k} - S_m| \leq \sum_{j=n+1}^{m+k} |a_j|$$

- $$\leq \sum_{j=m+1}^{+\infty} |a_j| \leq \sum_{j=\bar{n}+1}^{+\infty} |a_j| \overset{(3.1)}{<} \varepsilon$$