Lezione 36 17/12/2020 8.30-10.00

Equazione differenziali ordinarie

Lineari del 1° e 2° ordine a coefficienti costanti omogenee

$$au'' + bu' + cu = f \qquad (1)$$

data $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

dati $a, b, c \in \mathbb{R}$, cerco le funzioni $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ che siano $u \in C^2(\mathbb{R})$ e che verifichino la (1) in ogni $x \in \mathbb{R}$

- Incognita una funzione, e la (1) coinvolge u, u', u''.
- l'ordine di derivata massimo detta l'ordine dell'equazione
- a, b, c si chiamano coefficienti (e sono costanti)
- se $f = 0$ l'equazione si dice omogenea.

2

D'ora in poi supporremo $f=0$ (eq. omogenea)

Cerchiamo le soluzioni della (1), che saranno esplicite. Supponiamo a, b, c non siano tutti nulli

Caso 1) $a=0$ (eq. 1° ordine)

(2) $bu'+cu=0$

(1.1)

se $b=0$ $u(x)\equiv 0$

$cu(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $(c\neq 0)$

(1.2)

$b\neq 0$

(1.2.1)

$c=0$

$bu'=0$

$bu'(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Downarrow$

$u'(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Downarrow$ teo

$u(x)=$ costante

In particolare (2) ha infinite soluzioni

(1.2.2)

$c\neq 0$

$bu'+cu=0$

$u'+\frac{c}{b}u=0$

$u'=-\frac{c}{b}u$

$\Downarrow$

$u(x)=\alpha e^{-\frac{c}{b}x}$

con $\alpha\in\mathbb{R}$

(infinite sol.)

3/

Caso 2) $a \neq 0$

$$a u'' + b u' + c u = 0$$

Caso 2.1) $b = c = 0$

$$a\, u''(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\iff u''(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\implies u(x) = \alpha x + \beta \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(infinite soluzioni, con 2 parametri liberi,
nel Caso 1) avevo 1 solo parametro libero)

Caso 2.2) $b \neq 0$, $c = 0$

(3) $$a u'' + b u' = 0$$

"Finta eq. del 2° ordine": pongo $u' = v$
e (3) diventa $a v' + b v = 0$, $v' = -\frac{b}{a} v$

$$\xrightarrow{\text{Caso } (1.2.2)} v(x) = \alpha\, e^{-\frac{b}{a}x} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$u'(x) = \alpha\, e^{-\frac{b}{a}x}$$

4/

$$u'(x) = \alpha e^{-\frac{b}{a}x}$$

$$u'(t) = \alpha e^{-\frac{b}{a}t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^x u'(t)\,dt = \alpha \int_0^x e^{-\frac{b}{a}t}\,dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$u(x) - u(0) \qquad -\alpha \frac{a}{b}\left[e^{-\frac{b}{a}t}\right]_0^x$$

$$u(x) = u(0) - \alpha \frac{a}{b}\left(e^{-\frac{b}{a}x} - 1\right)$$

$$= -\frac{\alpha a}{b} e^{-\frac{b}{a}x} + u(0) + \frac{\alpha a}{b}$$

$$u(x) = -\alpha \frac{a}{b} e^{-\frac{b}{a}x} + \beta \quad , \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Controllare a casa che questa $u(x)$ verifica (3).

Caso 3) $a \neq 0, \; b \neq 0, \; c \neq 0$

$$a u'' + b u' + c u = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad u'' + \frac{b}{a} u' + \frac{c}{a} u = 0$$

chiamo $A = \frac{b}{a}$, $B = \frac{c}{a}$

$$u'' + A u' + B u = 0 \qquad (5)$$

TRUCCO pongo $u(x) = e^{\lambda x} v(x)$

con $\lambda \in \mathbb{C}$ da scegliere.

Scrivo (5) nella variabile $v(x)$.

(i) $u(x) = e^{+\lambda x} v(x)$

(ii) $u'(x) = \lambda e^{\lambda x} v(x) + e^{\lambda x} v'(x)$

(iii) $u''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} v(x) + 2\lambda e^{\lambda x} v'(x) + e^{\lambda x} v''(x)$

Sostituisco (i), (ii), (iii) nella (5):

si ottiene

$$(6) \quad e^{\lambda x} \left[v'' + (A + 2\lambda) v' + (\lambda^2 + \lambda A + B) v \right] = 0$$

Sembra peggio di (5) !!

(6)

$\Updownarrow$

$$(*) \quad v'' + (A+2\lambda)v' + (\lambda^2 + \lambda A + B)v = 0$$

$P(\lambda) := \lambda^2 + A\lambda + B$ polinomio caratteristico dell' eq. differenziale (S).

Se scegliamo λ : $P(\lambda) = 0$ allora la $(*)$ diventa $v'' + (A+2\lambda)v' = 0$

che è "finta" eq. del secondo ordine, che risolvo (vedi pag 3) $\Longrightarrow v(x)$

$\Longrightarrow \quad u(x) = e^{\lambda x} v(x)$

$P(\lambda)$ è polinomio in $\lambda \in \mathbb{C}$ a coefficienti reali A, B; P ha 2 radici complesse $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, e se $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$\Longrightarrow \lambda_2 = \bar{\lambda}_1$. Dunque

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 + \lambda(-\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2$$

$$A = -(\lambda_1 + \lambda_2), \quad B = \lambda_1 \lambda_2$$

Prendiamo $\lambda = \lambda_1$ e mettiamolo in (w)

$P(\lambda_1) = 0$

$$\Longrightarrow \quad v'' + (2\lambda_1 + A)v' = 0$$

$$v' = f \quad \Longrightarrow \quad f' + (2\lambda_1 + A) f = 0 \quad (\#)$$

« trovo $f \rightsquigarrow v \rightsquigarrow u$ »

Notiamo che, dato che $A = -(\lambda_1 + \lambda_2)$,

$$2\lambda_1 + A = 2\lambda_1 - (\lambda_1 + \lambda_2) = \lambda_1 - \lambda_2$$

Dunque la (#) diventa

$$f' + (\lambda_1 - \lambda_2) f = 0$$

Vi sono più casi:

(•) $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow f' = 0 \Rightarrow f(x) = c$ costante

$$\Rightarrow v'(x) = c \Rightarrow v(x) = cx + d, \quad d \text{ cost}$$

$$\Rightarrow u(x) = e^{\lambda_1 x} v(x) = e^{\lambda_1 x}(cx + d)$$

« data l'eq. diff. (S), scrivo $P(\lambda)$, trovo le radici, se sono $=$ e $= \lambda_1$, allora tutte le soluzioni di (S) sono $e^{\lambda_1 x}(cx + d)$ con $c, d \in \mathbb{R}$ »

(ii) $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$f' + (\lambda_2 - \lambda_1) f = 0$$

$$\Downarrow (1.2.2)$$

$$f(x) = c_1 e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} = v'(x) \quad \text{con } c_1 \text{ cost.}$$

$$\Rightarrow \quad v(x) = \frac{c_1}{\lambda_2-\lambda_1} e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} + d_1, \quad \text{con } d_1 \text{ cost}$$

$$v(x) = e^{-\lambda_1 x} u(x)$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = e^{\lambda_1 x}\left(\frac{c_1}{\lambda_2-\lambda_1} e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} + d_1\right)$$

(8) $$= \frac{c_1}{\lambda_2-\lambda_1} e^{\lambda_2 x} + d_1 e^{\lambda_1 x}$$

al variare di $c_1, d_1 \in \mathbb{C}$

(8) $\Leftrightarrow$ $$\boxed{u(x) = k_1 e^{\lambda_1 x} + k_2 e^{\lambda_2 x}}$$

al variare di $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$

Se $\lambda_1 \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\boxed{u(x) = k_1 e^{\lambda_1 x} + k_2 e^{\lambda_2 x} \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}}$$

Se $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda_1 = a_1 + i b_1$, $b_1 \neq 0$

$$\Longrightarrow \lambda_2 = a_1 - i b_1$$

$$e^{\lambda_1 x} = e^{(a_1 + i b_1) x} = e^{a_1 x} e^{i b_1 x}$$

$$= e^{a_1 x} \left(\cos(b_1 x) + i \operatorname{sen}(b_1 x) \right)$$

$$\Rightarrow u(x) = k_1 e^{a_1 x} \left(\cos(b_1 x) + i \operatorname{sen}(b_1 x) \right)$$

$$+ k_2 e^{a_1 x} \left(\cos(b_1 x) - i \operatorname{sen}(b_1 x) \right)$$

$$= e^{a_1 x} \left[\cos(b_1 x) (k_1 + k_2) + i \operatorname{sen}(b_1 x) (k_1 - k_2) \right]$$

$$= e^{a_1 x} \left[k_3 \cos(b_1 x) + k_4 \operatorname{sen}(b_1 x) \right]$$

com $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$.

$\square$