Dimostrazione (limite notevole n° 3):

Se $a = 1$, $\sqrt[n]{a} = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

supponiamo $a > 1$; se dimostro in questo caso $\sqrt[n]{a} \to 1$ allora dico che se $b \in (0,1)$, $\sqrt[n]{b} \to 1$

Infatti $b = \frac{1}{a}$ con $a > 1$ $\left(a = \frac{1}{b}\right)$

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \longrightarrow 1$$

Posso dunque sempre supporre $a > 1$; se $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{a} > 1 \iff \underbrace{\sqrt[n]{a} - 1}_{= x_n} > 0$$

Dalla disuguaglianza di Bernoulli I (essendo $x \geq -1$)

allora $\to (1 + x_n)^n \geq 1 + n x_n = (1 + x_n)^n = (1 + \sqrt[n]{a} - 1)^n =$

$= a \geq 1 + n x_n = x_n \leq \frac{a-1}{n}$

Si deduce quindi $0 < x_n \leq \frac{a-1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ dal teo dei 2 carabinieri $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} x_n = 0$

Ma $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Ingredienti : teo 2 carabinieri e disuguaglianza di bernoulli

Resta $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Tentiamo di ripercorrere quanto fatto per $\sqrt[n]{a}$, (mettendo n al posto di a): mi ritrovo

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} < \sqrt[n]{n} - 1 \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{n-1}{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Non posso applicare il teorema dei 2 carabinieri perchè le 2 successioni non convergono allo stesso limite

Lezione n° 13 21/10/2020

Abbiamo visto $\lim \sqrt[n]{a} = 1 \qquad a > 0$

Esercizio (Disuguaglianza Bernoulli II)

$$(1+x)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} x^2 \quad \begin{array}{l} \forall x > 0 \\ \forall n \geq 1 \end{array}$$

(Dimostrazione per casa). Ripetendo gli argomenti della fine della lezione 12, ponendo

$$x_n := \sqrt[n]{n} - 1$$

Si ottiene (sostituendo al posto di n $\frac{n(n-1)}{2}$)

$$0 < x_n \leq \frac{2(n-1)}{n(n-1)}$$

Dal teo dei 2 carabinieri, segue

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$