Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona crescente.

Suppongo

1) $\sup E < +\infty$

2) $\sup f(E) < +\infty$

3) Posto $S := \sup E$, allora $S \notin E$

allora $\exists \lim_{x \to S} f(x)$ su $E = \sup f(E)$

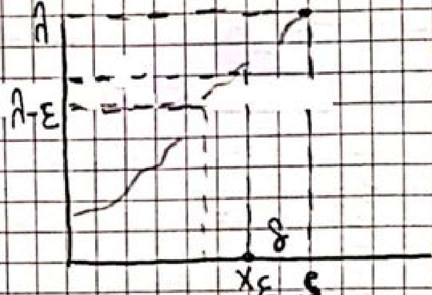
Teo Sia $f: \overset{*}{E} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(intervallo)

monotona crescente. Supponiamo

TEO FUNZIONI MONOTONE

1) $\sup E < +\infty$
2) $\sup f(E) < +\infty$
3) posto $s := \sup E$, allora $s \notin E$

Allora $\exists \lim_{x \to s} f(x) \overset{\text{su } E}{=} \sup f(E)$



DIMOSTRAZIONE

$\lambda := \sup f(E) < +\infty$

Posso usare la caratterizzazione del sup

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists y_\varepsilon \in f(E) : \lambda - \varepsilon < y$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in E : \lambda \geq f(x_\varepsilon) > \lambda - \varepsilon$

(y è un elemento dell'immagine e quindi $\exists$ un certo punto che ha come immagine proprio y_ε)

$x_\varepsilon \in E$, $s \notin E \Rightarrow \delta := s - x_\varepsilon > 0$

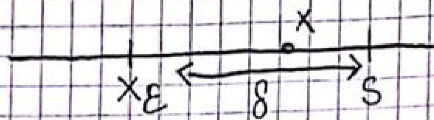
Dico che

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = s - x_\varepsilon : \underline{\forall x \in E} \ \underline{|x - s| < \delta}$] def di limite

$\Rightarrow$ (allora) $\underline{|f(x) - \lambda| < \varepsilon}$

Se con questa scelta di δ, vale quanto sottolineato allora $\lambda = \lim_{x \to s} f(x)$ su E

Sia dunque $x \in E$ $|x - s| < \delta^{= s - x_\varepsilon}$, Ne segue $x > x_\varepsilon$



Poiché f è crescente abbiamo

$$f(x) \geq f(x_\varepsilon) > \lambda - \varepsilon \qquad (13.1)$$

inoltre $f(x) \leq \lambda$ (13.2) (perché λ è l'estremo sup dell'immagine)

Mettendo insieme queste informazioni abbiamo dimostrato che:

$\forall \varepsilon > 0$ trovo $\delta = s - x_\varepsilon > 0$ tale che

$\forall x \in E \ |x - s| < \delta$, $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$

dato che (13.1) + (13.2)

$$\lambda - \varepsilon < f(x) \leq \lambda < \lambda + \varepsilon$$