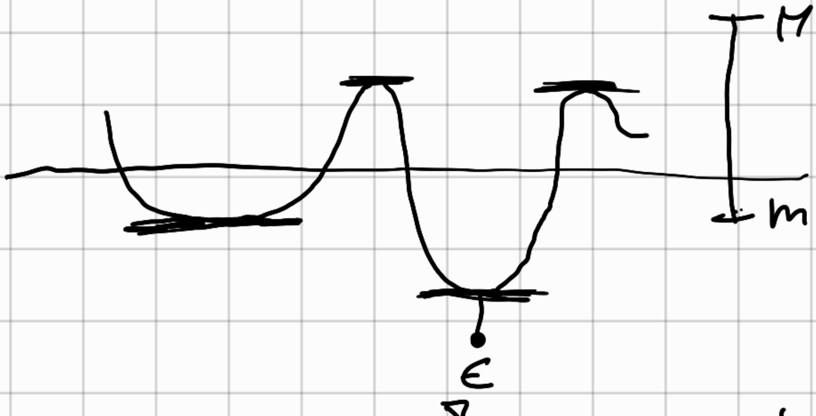
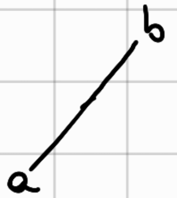
Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile in $[a,b]$, e tale che $f(a)=f(b)$ (negli estremi ho lo stesso valore). Allora $\exists\, c\,(a,b) : f'(c)=0$ (punto compreso dagli estremi)



C'è almeno un punto interno in corrispondenza al quale la retta tangente al grafico è orizzontale

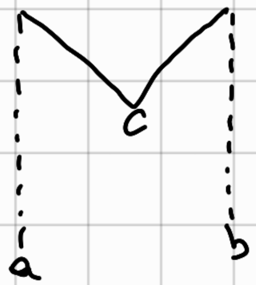
Casi in cui è falso

1) Se non suppongo che $f(a)=f(b)$



non c'è ragione per cui ci debba essere un punto nell'intervallo in cui è uguale a 0

2) Se non suppongo che f non sia derivabile in tutti i punti dell'intervallo, ho problemi:



Assume negli estremi lo stesso valore, ma non è derivabile in c e cioè non c'è nessun punto, in cui f è derivabile e la derivata è 0

DIMOSTRAZIONE

f derivabile in $[a,b] \overset{\text{implica}}{\Longrightarrow}$ f continua $[a,b]$

$\Longrightarrow f[a,b]$ ha max e min (TEOREMA DI WAISTRASS)

Poniamo $m = \min f([a,b])$

$M = \max f([a,b])$

Ci sono 2 casi

1) $m = M$

2) $m \neq M$ ma quindi $m < M$

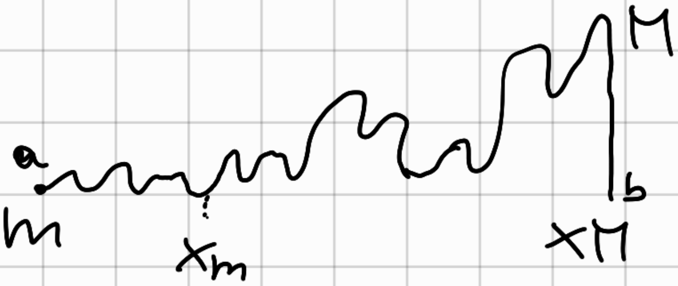
1) $m = M \Longrightarrow f$ è costante, tutti i valori della funzione sono uguali a m

$\Rightarrow f(x) = m \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

Per la costante la derivata e' zero in tutti i punti

2) $m < M$



Prendo un punto di minimo (x_m) e un punto di massimo (x_M)

$x_m \in [a,b] : f(x_m) = m$

$x_M \in [a,b] : f(x_M) = M$

Dico che non e' possibile la situazione che

$\{x_m, x_M\} = \{a,b\}$

Infatti se fosse così:

$f(a) = f(b) = m = M$

IPOTESI

ma io nella 2ª IPOTESI mi sono messo nel caso in cui m e' minore di M. Quindi non e' possibile

Dunque o x_m o x_M non e' un estremo di $[a,b]$

Supponiamo ad es. $x_m \in [a,b]$. Allora $f'(x_m) = 0$

PER IL COROLLARIO ....

non e' un estremo, ma un punto di minimo all'interno dell'intervallo

Nel caso $x_M \in (a,b)$, ottengo $f'(x) = 0$

analogo uso del corollario